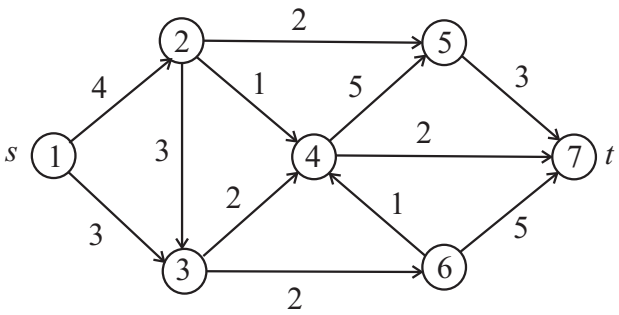
Aineistotehtävä: Maksimaalinen virtaus

Lue aineisto huolella. Tehtävien joukossa on kysymyksiä, joissa aineistoa sovelletaan suoraan, ja kysymyksiä, joissa aineiston pohjalta tulee tehdä päätelmiä. Kysymykset eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Virtausverkko, tässä lyhyesti *verkko*, on viisikko (V,E,c,s,t). Verkossa joukko V on äärellinen *solmujoukko*. Solmujoukon alkiot, *solmut*, on numeroitu $1,2,\ldots,n$, jossa n on solmujen määrä. Solmut s ja t ovat erikoisasemassa, s on *lähde* ja t *kohde*. Ne ovat eri solmuja. Joukko E on solmujen järjestettyjen parien (i,j) joukko. Joukon alkioita kutsutaan verkon *kaariksi*. Funktio c on *kapasiteettifunktio*, joka liittää kuhunkin kaareen (i,j) positiivisen kokonaisluvun c_{ij}. Lukua c_{ij} kutsutaan kaaren (i,j) *kapasiteetiksi*. Kaaren (i,j) solmu i on kaaren *lähtösolmu* ja j sen *maalisolmu*. Kaari *lähtee* lähtösolmustaan ja se *tulee* maalisolmuunsa. Virtausverkossa lähteeseen ei tule yhtään kaarta eikä kohteesta lähde yhtään kaarta. Kaikkiin muihin solmuihin tulee kaaria ja niistä lähtee kaaria.

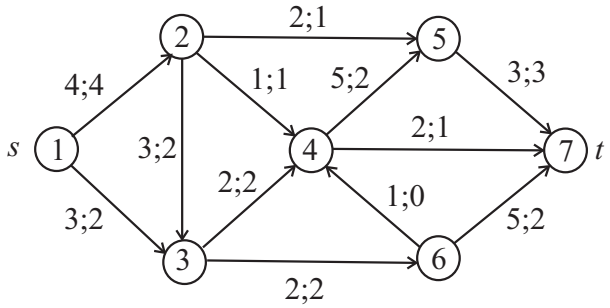
Verkko esitetään usein kaaviona. Kaaviossa kutakin solmua esittää ympyrä, jonka sisällä on solmun numero. Lähteen viereen merkitään kirjain s ja kohteen viereen kirjain t. Kutakin kaarta (i,j) esittää solmusta i solmuun j osoittava nuoli. Kaaren kapasiteetti c_{ij} merkitään nuolen viereen. Kuvassa 1 on erään verkon kaavioesitys.



Kuva 1. Virtausverkko (V,E,c,s,t), jossa $V=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,
$E=\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,6),(4,5),(4,7),(5,7),(6,4),(6,7)\}$,
funktion c arvot ovat $c_{12}=4,\ c_{13}=3,\ c_{23}=3,\ c_{24}=1,\ c_{25}=2,\ c_{34}=2,\ c_{36}=2,$
$c_{45}=5,\ c_{47}=2,\ c_{57}=3,\ c_{64}=1,\ c_{67}=5$, lähde $s=1$ ja kohde $t=7$.

Olkoon k yhtä suurempi kokonaisluku. Verkon *polku* on sen solmujen ja kaarten jono $v_1,a_1,v_2,a_2,\ldots,a_{k-1},v_k$, jossa kukin v_i on verkon solmu (tässä $i=1,2,\ldots,k$) ja kukin a_i on joko verkon kaari (v_i,v_{i+1}) tai verkon kaari (v_{i+1},v_i) (tässä $i=1,2,\ldots,k-1$). Edellisessä tapauksessa sanotaan, että kaari on polussa *eteenpäin suuntautuva*, jälkimmäisessä, että se on polussa *taaksepäin suuntautuva*. Polku *alkaa* sen ensimmäisestä solmusta ja *päättyy* sen viimeiseen solmuun. Polun *pituus* on sen kaarten määrä. Polku on *yksinkertainen*, jos mikään solmu ei esiinny siinä kahdesti.

Olkoon f funktio, joka liittää verkon kuhunkin kaareen (i,j) ei-negatiivisen kokonaisluvun f_{ij}. Kutsutaan lukua f_{ij} *kaaren* (i,j) *virtaukseksi*. *Solmuun tuleva virtaus* on siihen tulevien kaarten virtausten summa ja *solmusta lähtevä virtaus* on siitä lähtevien kaarten virtausten summa. Funktio f on *verkon virtaus*, jos $f_{ij}\le c_{ij}$ kaikilla verkon kaarilla (i,j) (virtaukset eivät ylitä kapasiteetteja) ja lisäksi kaikissa muissa solmuissa paitsi lähteessä ja koh-



Kuva 2. Kuvan 1 verkko ja eräs sen virtaus.

teessa solmuun tuleva virtaus on yhtä suuri kuin solmusta lähtevä virtaus. Erikoinen virtaus on 0-*virtaus*, jossa kaikkien kaarten virtaus on 0. Verkon virtauksen *arvo* on verkon lähteestä s lähtevien kaarten virtauksien summa. Esimerkiksi 0-virtauksen arvo on siis 0.

Verkon virtaus merkitään virtausverkkoa esittävään kaavioon kirjoittamalla kaaren (i, j) kapasiteetin c_{ij} jälkeen puolipiste ja kaaren virtaus f_{ij}. Siis kaaren yhteyteen tulee merkintä "c_{ij} ; f_{ij}". Kuvassa 2 on kuvan 1 verkon eräs virtaus.

Maksimaalisen virtauksen ongelma on etsiä verkon virtaus, jonka arvo on mahdollisimman suuri.

Maksimaalisen virtauksen ongelma voidaan ratkaista aloittamalla mistä tahansa verkon virtauksesta, vaikkapa 0-virtauksesta, ja kasvattamalla sitten virtauksen arvoa sopivasti. Arvon kasvattamisessa saatetaan joutua paitsi lisäämään joidenkin kaarien virtausta myös vähentämään toisten virtausta.

Olkoon f verkon virtaus. Kaaren (i, j) *jäännöskapasiteetti* on luku $c_{ij} - f_{ij}$. Kaaressa olevaa virtausta voidaan kasvattaa korkeintaan kaaren jäännöskapasiteetilla. Virtausta voidaan taas pienentää korkeintaan määrä f_{ij}.

Tarkastellaan verkon yksinkertaista polkua P, joka alkaa lähteestä ja päättyy kohteeseen. Olkoon A polun eteenpäin suuntautuvien kaarten joukko ja B sen taaksepäin suuntautuvien kaarten joukko. Olkoon m_A pienin joukkoon A kuuluvien kaarten jäännöskapasiteeteista ja m_B pienin joukkoon B kuuluvien kaarten virtauksista ja m pienin luvuista m_A ja m_B. Jos m ei ole 0, niin P on verkon *täydennyspolku*. Silloin m on täydennyksen *määrä* polkua P pitkin. Verkon virtauksen arvoa voidaan kasvattaa täydennyspolkua pitkin kasvattamalla sen kaikkien eteenpäin suuntautuvien kaarten virtausta täydennyksen määrä ja pienentämällä sen kaikkien taaksepäin suuntautuvien kaarten virtausta sama määrä.

Toimenpide, joka koostuu täydennyspolun etsimisestä ja virtauksen arvon kasvattamisesta polkua pitkin edellä kuvatulla tavalla, on *täydennyskierros*.

Verkon maksimaalisen virtauksen muodostamiseksi asetetaan aluksi verkkoon 0-virtaus. Sen jälkeen suoritetaan täydennyskierroksia, kunnes verkossa ei enää ole täydennyspolkua. Silloin virtaus on maksimaalinen. Tulokseen ei vaikuta, missä järjestyksessä täydennuspolkuja käytetään.

Kysymykset

1. (a) *(1 piste)* Mikä on aineiston kuvan 2 verkon virtauksen arvo?

   (b) *(3 pistettä)* Onko aineiston kuvassa 2 oleva virtaus maksimaalinen? Perustele vastauksesi. Jos virtaus ei ole maksimaalinen, piirrä kaavio, joka esittää samaa verkkoa ja sen maksimaalista virtausta.

2. (a) *(2 pistettä)* Olkoon verkossa (V,E,c,s,t) joukko $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, joukko $E = \{(1,2), (1,3), (1,6), (2,4), (3,2), (3,5), (4,3), (4,7), (5,7), (6,5), (6,7)\}$, funktion c arvot ovat $c_{12} = 5,\ c_{13} = 2,\ c_{16} = 5,\ c_{24} = 7,\ c_{32} = 3,\ c_{35} = 7,\ c_{43} = 3, c_{47} = 2,\ c_{57} = 8,\ c_{65} = 2,\ c_{67} = 2$, lähde $s = 1$ ja kohde $t = 7$. Piirrä verkkoa esittävä kaavio.

   (b) *(2 pistettä)* Tarkastellaan a-kohdan verkon kaarten joukossa määriteltyä funktiota f, jonka arvot ovat $f_{12} = 1,\ f_{13} = 2,\ f_{16} = 2,\ f_{24} = 3,\ f_{32} = 2,\ f_{35} = 2,\ f_{43} = 1,\ f_{47} = 2,\ f_{57} = 2,\ f_{65} = 1,\ f_{67} = 1$. Onko funktio verkon virtaus? Perustele vastauksesi.

   (c) *(2 pistettä)* Tarkastellaan a-kohdan verkon virtausta $f_{12} = 3,\ f_{13} = 2,\ f_{16} = 4,\ f_{24} = 5,\ f_{32} = 2,\ f_{35} = 3,\ f_{43} = 3,\ f_{47} = 2,\ f_{57} = 5,\ f_{65} = 2,\ f_{67} = 2$. Mitkä ovat jäännöskapasiteetit?

   (d) *(3 pistettä)* Kohdan a verkossa on c-kohdassa annettu virtaus. Anna jokin verkon täydennyspolku. Mikä on täydennyksen määrä polkua pitkin?

   (e) *(5 pistettä)* Muodosta a-kohdan verkon maksimaalinen virtaus aineistossa esitetyllä menetelmällä alkaen verkon 0-virtauksesta. Piirrä jokaisen täydennyskierroksen jälkeen senhetkisen virtauksen sisältävä kaavio.

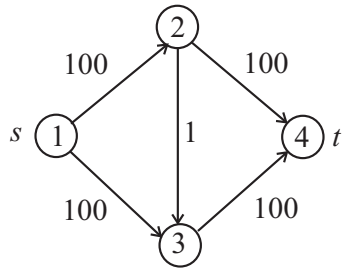
3. Kuvan 3 verkon maksimaalinen virtaus muodostetaan aineistossa kuvatulla tavalla. Täydennyspolun voi joillakin täydennyskierroksilla valita usealla eri tavalla.

   (a) *(1 piste)* Mikä on lyhyimmän mahdollisen täydennyspolun pituus ensimmäisellä täydennyskierroksella?

   (b) *(1 piste)* Mikä on pisimmän mahdollisen täydennyspolun pituus ensimmäisellä täydennyskierroksella?

   (c) *(2 pistettä)* Kuvassa 3 olevan verkon maksimaalinen virtaus muodostetaan siten, että jokaisella täydennyskierroksella valitaan aina lyhyin mahdollinen täydennyspolku. Kuinka monta täydennyskierrosta tarvitaan? Perustele vastauksesi.

   (d) *(3 pistettä)* Kuvassa 3 olevan verkon maksimaalinen virtaus muodostetaan siten, että jokaisella täydennyskierroksella valitaan aina pisin mahdollinen täydennyspolku. Kuinka monta täydennyskierrosta tarvitaan? Perustele vastauksesi.



Kuva 3. Tehtävän 3 verkko.