Tehtävä 3: Survo-ristikko

Survo-ristikoissa tehtävänä on täyttää $m \times n$ -taulukko luvuilla $1, 2, \ldots, m \cdot n$ siten, että vaaka- ja pystyrivisummat täsmäävät annettuihin reunoilla oleviin lukuihin ja jokainen luku esiintyy ristikossa vain kerran. Taulukkoon on saatettu sijoittaa joitakin lukuja jo valmiiksi, jottei ratkaiseminen olisi liian hankalaa, eikä mahdollisia ratkaisuja olisi yhtä enempää.

Alla olevassa survo-ristikossa on 3 riviä ja 4 saraketta, joten siihen on tarkoitus sijoittaa luvut $1, 2, \ldots, 12$. Rivit on nimetty numeroin 1-3 ja sarakkeet kirjaimin A-D. Rivisummat ovat oikeassa reunassa ja sarakesummat alareunassa.

	A	**B**	**C**	**D**	
1	6				30
2		8			18
3			3		30
	16	27	10	25	

Tehtävässä on annettu valmiiksi luvut 3, 6 ja 8, joten on löydettävä oikeat paikat luvuille $1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 11$ ja 12 siten, että annetut rivi- ja sarakesummat täsmäävät.

Ratkaiseminen kannattaa yleensä aloittaa rivistä tai sarakkeesta, jossa on vähiten puuttuvia lukuja. Sarakkeen B puuttuvien lukujen summa 19 voidaan esittää sääntöjen sallimalla tavalla useassa muodossa, esimerkiksi: $19 = 7 + 12 = 12 + 7 = 9 + 10 = 10 + 9$. Sarakkeen A puuttuvien lukujen summa on 10, jolla on vain yksi mahdollinen esitys $10 = 1 + 9$, sillä muut vaihtoehdot $10 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6$ sulkeutuvat pois taulukossa jo esiintyvien lukujen johdosta. Lukua 9 ei voi sijoittaa riville 2, koska silloin rivin summaksi tulisi vähintään $9 + 8 + 2 + 4 = 23$, joka on enemmän kuin 18. Tämän perusteella taulukko täydentyy siis muotoon:

	A	**B**	**C**	**D**	
1	6				30
2	1	8			18
3	9		3		30
	16	27	10	25	

Nyt sarakkeelle B jää vain vaihtoehto $27 - 8 = 19 = 7 + 12 = 12 + 7$. Luku 7 ei voi kuitenkaan olla rivillä 1, sillä sen puuttuvien lukujen summa

olisi $30 - 7 - 6 = 17$. Luvun $17 = 12 + 5 = 11 + 6 = 10 + 7 = 9 + 8$ ositus ei enää onnistu sallitulla tavalla riville 1, sillä osituksen lukupareista aina vähintään toinen esiintyisi jo taulukossa. Taulukko täydentyy siis muotoon:

	A	**B**	**C**	**D**	
1	6	12			30
2	1	8			18
3	9	7	3		30
	16	27	10	25	

jolloin alimman rivin viimeiseksi luvuksi tulee $30 - 7 - 9 - 3 = 11$:

	A	**B**	**C**	**D**	
1	6	12			30
2	1	8			18
3	9	7	3	11	30
	16	27	10	25	

Ylimmältä riviltä puuttuvien lukujen summa on $30 - 12 - 6 = 12$, jonka ainoa mahdollinen ositus on $12 = 2 + 10$ vieläpä niin, että luku 2 tulee kolmanteen sarakkeeseen; luku 10 tuolla paikalla aiheuttaisi sarakesumman 10 ylityksen. Ristikko on näin saatu muotoon:

	A	**B**	**C**	**D**	
1	6	12	2	10	30
2	1	8			18
3	9	7	3	11	30
	16	27	10	25	

Ristikko täydentyy nyt helposti lopulliseen muotoonsa:

	A	**B**	**C**	**D**	
1	6	12	2	10	30
2	1	8	5	4	18
3	9	7	3	11	30
	16	27	10	25	

Aineisto pohjautuu kirjoitukseen: Seppo Mustonen, Survo-ristikoista, 2.6.2006, `http://www.survo.fi/papers/ristikot.pdf`.

Kysymykset

Kysymys 1. Esittävätkö seuraavat taulukot kelvollisia survo-ristikoita, eli onko ne mahdollista ratkaista sääntöjen mukaisesti? Lisäksi, jos ristikko on sääntöjen mukaan ratkaistavissa, anna vastauksenasi myös ratkaistu ristikko. Jos ristikkoa ei voi ratkaista sääntöjen mukaisesti, anna myös perustelut.

(a)

	A	**B**	**C**	**D**	
1		6			30
2	13				22
3			3		30
	27	16	10	25	

(b)

	A	**B**	**C**	**D**	
1	1	4	2		14
2	3		5	11	27
3		10		12	37
	10	22	16	30	

(c)

	A	**B**	**C**	**D**	
1		6			30
2	8				18
3			3	6	30
	27	16	10	25	

(d)

	A	**B**	**C**	**D**	
1					9
2	8				18
3			3		30
	16	16	10	15	

(maksimipistemäärä 8p)

Kysymys 2. Tarkastellaan alla olevaa ristikkoa.

	A	**B**	**C**	**D**	
1					25
2					11
	8	11	7	10	

(a) Ratkaise ristikko. Anna vastauksenasi ainoastaan ratkaistu survo-ristikko.

(maksimipistemäärä 4)

(b) Esitä ratkaisusi välivaiheittain. Perustele lyhyesti mutta täsmällisesti tekemäsi päättelyt jokaisen ristikosta puuttuvan numeron ratkaisemiseksi.

(maksimipistemäärä 4)

Kysymys 3. Tarkastellaan alla olevaa survo-ristikkoa.

	A	**B**	**C**	**D**	
1		8			18
2		12			33
3		11			27
	8	31	14	25	

(a) Ratkaise ristikko. Anna vastauksenasi ainoastaan ratkaistu survo-ristikko.

(maksimipistemäärä 4)

(b) Esitä ratkaisusi välivaiheittain. Perustele lyhyesti mutta täsmällisesti tekemäsi päättelyt jokaisen ristikosta puuttuvan numeron ratkaisemiseksi.

(maksimipistemäärä 5)