Tehtävä 3: (n,k)-peli. Esimerkkiratkaisuja

1. Tässä on yksi esimerkki. Sellaisia on lukuisia muitakin.

A	B	A	B	A	B	A	B	A
18	15	13	12	9	8	6	4	1
3	2	1	3	1	2	2	3	1

2. A aloittaa poimimalla yhden tikun. Jäljelle jää 17 tikkua. Tämän jälkeen A vastaa jokaiseen B:n vuoroon poimimalla sellaisen tikkumäärän, että vuoroparin jälkeen tikkumäärä on vähentynyt neljällä. Siis jos B poimii minkä tahansa tikkumäärän r, jossa $1 \leq r \leq 3$, niin A vastaa poimimalla tikkumäärän $4-r$. Tämä on sallittua, sillä $1 \leq 4-r \leq 3$. B:n ollessa vuorossa jäljellä olevat tikkumäärät ovat siis 17, 13, 9, 5 ja 1. Alla on vielä esitetty pelin kulku taulukkomuodossa. Siinä r_1, r_2, r_3 ja r_4 ovat B:n poimimat tikkumäärät, kukin niistä joku kokonaisluku joukosta $\{1,2,3\}$.

A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
18	17	$17-r_1$	13	$13-r_2$	9	$9-r_3$	5	$5-r_4$	1
1	r_1	$4-r_1$	r_2	$4-r_2$	r_3	$4-r_3$	r_4	$4-r_4$	1

3. A:lla ei ole voittostrategiaa. B voi vastata jokaiseen A:n vuoroon poimimalla sellaisen tikkumäärän, että vuoroparin jälkeen tikkumäärä on vähentynyt neljällä. Siis jos A poimii minkä tahansa tikkumäärän r, jossa $1 \leq r \leq 3$, niin B vastaa poimimalla tikkumäärän $4-r$. Tämä on sallittua, sillä $1 \leq 4-r \leq 3$. A:n ollessa vuorossa jäljellä olevat tikkumäärät ovat siis 17, 13, 9, 5 ja 1. Alla on vielä esitetty pelin kulku taulukkomuodossa. Siinä r_1, r_2, r_3 ja r_4 ovat A:n poimimat tikkumäärät, kukin niistä joku kokonaisluku joukosta $\{1,2,3\}$.

A	B	A	B	A	B	A	B	A
17	$17-r_1$	13	$13-r_2$	9	$9-r_3$	5	$5-r_4$	1
r_1	$4-r_1$	r_2	$4-r_2$	r_3	$4-r_3$	r_4	$4-r_4$	1

4. A:lla on voittostrategia. A aloittaa poimimalla 2 tikkua. Jäljelle jää 16 tikkua. Tämän jälkeen A vastaa jokaiseen B:n vuoroon poimimalla sellaisen tikkumäärän, että vuoroparin jälkeen tikkumäärä on vähentynyt viidellä. Siis jos B poimii minkä tahansa tikkumäärän r, jossa $1 \leq r \leq 4$, niin A vastaa poimimalla tikkumäärän $5-r$. Tämä on sallittua, sillä $1 \leq 5-r \leq 4$. B:n ollessa vuorossa jäljellä olevat tikkumäärät ovat siis 16, 11, 6, ja 1. Alla on vielä esitetty pelin kulku taulukkomuodossa. Siinä r_1, r_2 ja r_3 ovat B:n poimimat tikkumäärät, kukin niistä joku kokonaisluku joukosta $\{1,2,3,4\}$.

A	B	A	B	A	B	A	B
18	16	$16-r_1$	11	$11-r_2$	6	$6-r_3$	1
2	r_1	$5-r_1$	r_2	$5-r_2$	r_3	$5-r_3$	1

5. Aloittajalla on (n,k)-pelissä voittostrategia täsmälleen sellaisilla lukupareilla (n,k), joissa $k+1$ ei jaa tasan lukua $n-1$.

   Perustelut:

   (a) Oletetaan ensin, että $k+1$ jakaa tasan luvun $n-1$. Silloin on olemassa kokonaisluku $l \geq 0$ siten, että $n-1 = l(k+1)$, eli että $n = l(k+1)+1$.

   Jos tässä $l = 0$, niin aloittaja häviää, sillä pöydällä on 1 tikku.

   Oletetaan induktiota varten, että aloittajalla ei ole voittostrategiaa, mikäli $l = l_0 \geq 0$. Olkoon sitten $l = l_0 + 1$. Silloin $n = (l_0+1)(k+1)+1 = l_0(k+1) + 1 + k + 1$. Poimikoon aloittaja ensin r tikkua, jossa r on mikä tahansa kokonaisluku siten, että $1 \leq r \leq k$. Jäljelle jää $l_0(k+1)+1+k+1-r$ tikkua. Koska $1 \leq k+1-r \leq k$, toinen pelaaja saa vastata siihen poimimalla $k+1-r$ tikkua. Jäljelle jää $l_0(k+1)+1$ tikkua. Aloittajalla ei induktio-oletuksen mukaan kuitenkaan ole tässä tilanteessa voittostrategiaa. Koska tilanteeseen joudutaan alkutilanteesta poimipa aloittaja alussa minkä tahansa luvallisen tikkumäärän r, hänellä ei ole voittostrategiaa alkutilanteessakaan.

   (b) Oletetaan sitten, että $k+1$ ei jaa tasan lukua $n-1$. Silloin on olemassa kokonaisluvut $l \geq 0$ ja r, jossa $1 \leq r \leq k$, siten, että $n-1 = l(k+1)+r$, eli että $n = l(k+1)+r+1$. Aloittajan on nyt luvallista poimia r tikkua. Tämän jälkeen pöydällä on $l(k+1)+1$ tikkua. Tästä eteenpäin (a)-kohdan nojalla vastustajalla ei ole voittostrategiaa, joten aloittaja voittaa, kunhan poimii aina (a)-kohdan mukaisen tikkumäärän.