Tehtävä 3: Esimerkkiratkaisut

Kysymys 1.

Oikea vastaus on $\frac{1}{3}$. Tämä voidaan päätellä esimerkiksi seuraavalla tavalla:

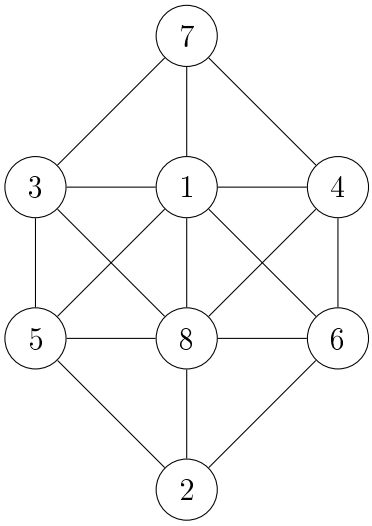
Kaksi neljästä kortista voidaan valita kuudella eri tavalla: (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4) ja (3,4). Kahdella yhdistelmällä väri on sama, eli (musta, musta) tai (punainen, punainen), lopuilla neljällä värin täytyy olla eri. Kaikkiaan on siis kuusi vaihtoehtoa, joissa kahdessa korteilla on sama väri. Voidaan olettaa kaikki tapaukset yhtä todennäköisiksi, todennäköisyys saada samanväriset kortit on siis $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Kysymys 2.

(a) Ratkaisusta on neljä variaatiota, loput saadaan kääntämällä ja/tai peilaamalla esitetty ratkaisu.

- 1 ja 8: Kaikilla luvuilla paitsi 1 ja 8 on kaksi vierekkäistä lukua. Kuvaajassa keskimmäisillä ympyröillä on yhteys kaikkiin paitsi yhteen muuhun lukuun, ainoa vaihtoehto on siis sijoittaa 1 ja 8 keskelle.
- 2:n ja 7:n sijoittamiseen on nyt molemmille vain yksi vaihtoehto
- loput on jo helppo sijoitella

(b) Ensimmäisen numeron sijoittamiseen on 8 mahdollisuutta, tämän jälkeen toisen 7 jne. Kaikkiaan vaihtoehtoja on siis $8 * 7 * ... * 2 * 1 = 8! = 40320$ kappaletta, joista vain 4 oikeita. Pahimmassa tapauksessa oikeat ratkaisut löytyvät vasta lopuksi, kestää siis 40320*10=403200 sekuntia käydä läpi kaikki vaihtoehdot (tarkkaan ottaen kestää 40320*10-30=403170 sekuntia löytää ensimmäinen ratkaisu, tämän huomioiminen ei välttämätöntä). Toisin sanoen tehtävän ratkaisuun kuluu 112 tuntia. Neljä kertaa nopeampi haku olisi myös mahdollinen, jos samaistetaan toisiinsa saman sijoittelun käännetyt ja peilatut versiot, tätä ei tarvitse huomioida saadakseen täydet pisteet.



Kysymys 3.

(a) Kahden nopan heitojen tuloksista syntyy 6*6=36 mahdollista yhdistelmää, jotka kaikki yhtä todennäköisiä. Lasketaan kullekin noppaparille, monessako tapauksessa ensimmäinen noppa voittaa, tämä jaettuna 36:lla on voittotodennäköisyys pelaajalle, joka pelaa ensimmäisellä nopalla toista vastaan (huomaa, että annetuilla nopilla tasapelit eivät ole mahdollisia). Noppien vertailu:

- P("A voittaa B:n") $= \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$
- P("A voittaa C:n") $= \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$
- P("B voittaa C:n") $= \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

Vastaavasti esim. P("B voittaa A:n") = 1-P("A voittaa B:n")$=\frac{7}{12}$. Noppa B on paras valinta, koska sillä voittaa A:n $\frac{7}{12}$ todennäköisyydellä, ja C:n samoin $\frac{7}{12}$ todennäköisyydellä.

(b) Ratkaisu ei ole itsestäänselvä:

- Jos lisäämme nopan jolla todennäköisemmin häviää B:lle, pelaaja 1:llä on yhä etu, mikäli hän valitsee B:n.
- Jos lisäämme kopion B:stä, voittotodennäköisyydet menevät tasan jos valinnat B ja C, mutta pelaaja 2 ei vielä saa etua.
- Olisiko olemassa noppa, jolla todennäköisemmin voittaa B:n, mutta pelaaja 1 ei varmistaisi etuaan vaikka valitsisikin sen?

Kuvatkoon mille tahansa kahdelle nopalle merkintä X$\succ$ Y ominaisuutta "X antaa edun Y:tä vastaan". Edellisen perusteella pöydällä olevilla nopilla toteutuu seuraava: B$\succ$A, B$\succ$C ja A$\succ$C. Koska B:llä saa edun sekä A:ta että C:tä vastaan, ensimmäinen pelaaja voi varmistaa aina etunsa valitsemalla sen. Luodaan nyt noppa C, jolle voimassa sekä C$\succ$B, että A$\succ$C, eli luodaan peliin kivi-paperi-sakset tyyppinen suhde noppien välille. Tällainen noppa voidaan luoda vaihtamalla 1 tai 2 arvoa 1 nykyisessä noppa C:ssä arvoksi 4.

Nopalla C = 1, 4, 4, 4, 4, 4 on voimassa

- P("A voittaa C:n") = $\frac{21}{36} = \frac{7}{12}$
- P("C voittaa B:n") = $\frac{25}{36}$

Vastaavasti nopalla C = 1, 1, 4, 4, 4, 4

- P("A voittaa C:n") = $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$
- P("C voittaa B:n") = $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

Voittostrategia pelaajalle 2:

- Pelaaja 1 valitsee nopan A, Pelaaja 2 nopan B
- Pelaaja 1 valitsee nopan B, Pelaaja 2 nopan C
- Pelaaja 1 valitsee nopan C, Pelaaja 2 nopan A

Tällä strategialla pelaajalla 2 on aina yli 50% voittotodennäköisyys.