Tehtävä 2: Aineistotehtävä

Töitä järjestellään monella inhimillisen toiminnan saralla. Töiden järjestelyongelmiin liittyy erilaisia tavoitteita ja rajoitteita. Toisinaan työ tulee tehdä annettuun hetkeen mennessä, joskus työn aikaisin mahdollinen aloittamishetki on määrätty, ja usein töillä on järjestysvaatimuksia: talon perustus rakennetaan ennen rungon pystytystä. Tyypillisiä tavoitteita ovat viimeisenä valmistuvan työn valmistumishetken aikaistaminen ja myöhässä valmistuvien töiden lukumäärän saaminen mahdollisimman pieneksi eli *minimointi*.

Oletetaan, että käytössä on yksi *kone* ja suoritettavana n *työtä*. Kullekin työlle i ilmoitetaan työn pituus p_i aikayksikköä, missä $i = 1, \ldots, n$ (kukin $p_i > 0$ ja kokonaisluku). Jos töistä ja töiden järjestämiseen liittyvästä tavoitteesta ei oleteta mitään muuta, voidaan työt suorittaa mielivaltaisessa järjestyksessä ja kaikkien töiden suorittamiseen kone tarvitsee aikayksikköjä yhteensä töiden pituuksien summan verran. Ensimmäisen työn suorittaminen aloitetaan hetkellä 1. Jos ensimmäisen työn pituus on 1, niin toinen työ voidaan aloittaa hetkellä 2. Taulukkoon 1 on laitettu viiden työn esimerkki. Taulukosta löytyvät myös järjestykseen 2, 1, 5, 3, 4 liittyvät töiden aloitusajat A_i ja valmistumisajat V_i. Huomaa, että $p_i = V_i - A_i + 1$.

Taulukko 1: Viiden työn esimerkki (vasemmalla), ja järjestys 2, 1, 5, 3, 4 (oikealla).

Työ	1	2	3	4	5
p_i	7	5	8	4	6

Työ	2	1	5	3	4
A_i	1	6	13	19	27
V_i	5	12	18	26	30

Jos halutaan minimoida kaikkien töiden valmistumishetkien kiireellisyyspainotettua summaa, tarvitaan lisää tietoa. Valmistumishetkien painokertoimet w_i kuvaavat töiden kiireellisyyksiä (valmistumisaikojen suhteen). Mitä isompi paino, sitä tärkeämpää on työn suorittaminen mahdollisimman aikaisin. Mikä tahansa järjestys ei enää välttämättä anna oikeaa ratkaisua. On osoitettu, että oikea ratkaisu löytyy, kun *työt järjestetään painokertoimien ja pituuksien suhteiden laskevaan järjestykseen*.

Esimerkiksi viiden järjestettävän työn pituudet ja painot on kerätty taulukkoon 2 (vasen puoli). Siitä löytyvät myös paino-pituus -suhteet, jonka mukaan työt on järjestetty (oikea puoli). Taulukon 2 oikealla puolella kolmannella rivilla on työn *valmistumishetki* V_i ja neljännellä rivillä on laskettu töiden *painotetut valmistumishetket* w_iV_i. Tämän esimerkin *optimaalinen eli paras tulos*, pienin valmistumishetkien painotettu summa, on taulukon 2 oikean puolen viimeisen rivin lukujen summa: 1021. *Optimaalinen työjärjestys* voidaan lukea taulukon 2 oikean puolen ensimmäiseltä

riviltä: se on 4, 3, 1, 2 ja 5.

Taulukko 2: Viiden työn esimerkki (vasemmalle) ja paras järjestys (oikealla).

Työ	1	2	3	4	5
p_i	6	13	6	5	12
w_i	6	11	9	14	10

Työ	4	3	1	2	5
w_i/p_i	14/5	9/6	6/6	11/13	10/12
V_i	5	11	17	30	42
w_iV_i	70	99	102	330	420

Eniten myöhässä valmistuvan työn myöhästymishetken minimointia varten tarvitaan töiden pituudet p_i ja *määräajat* m_i. Jos työ valmistuu määräajan jälkeen, lasketaan työn *i myöhästymisen pituus* $M_i = V_i - m_i$. Tavoitteen voi ilmaista myös seuraavasti: työt tulee järjestää siten, että suurin luvuista M_i on mahdollisimman pieni. Oikea ratkaisu löytyy, kun työt järjestetään *määräaikojen mukaan: työ, jonka määräaika on aikaisin, tulee ensimmäiseksi.*

Taulukossa 3 vasemmalla puolella on kuuden työn pituudet ja määräajat. Taulukon 3 oikealle puolelle on järjestetty työt niiden määräaikojen mukaan. Määräajat ovat toisella rivillä. Kolmannella rivillä ovat töiden valmistumishetket ja myöhästymisien pituudet löytyvät viimeiseltä riviltä. Tämän esimerkin optimaalinen tulos, eniten myöhästyvän työn mahdollisimman lyhyt myöhästyminen, on taulukon 3 oikean puolen viimeisen rivin suurin arvo: 8. Optimaalinen työjärjestys voidaan lukea ensimmäiseltä riviltä: se on 4, 1, 5, 6, 3 ja 2.

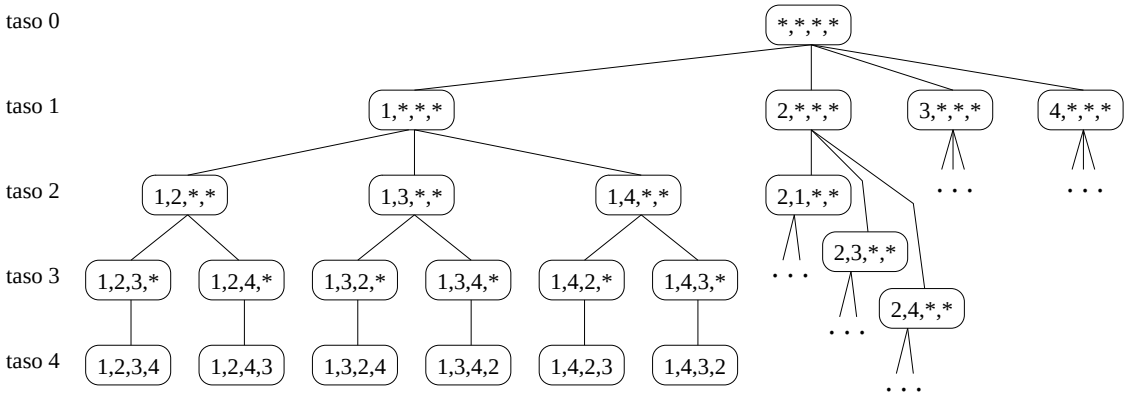
Taulukko 3: Kuuden työn esimerkki (vasemmalla) ja paras järjestys (oikealla).

Työ	1	2	3	4	5	6
p_i	8	10	10	12	8	13
m_i	39	53	50	34	40	46

Työ	4	1	5	6	3	2
m_i	34	39	40	46	50	53
V_i	12	20	28	41	51	61
M_i	-22	-19	-12	-5	1	8

Lisätään edelliseen ongelmaan töille aikaisin mahdollinen aloitusaika. Tätä ilmaistaan arvoilla a_i. Muista, että ensimmäisen työn suorittaminen aloitetaan hetkellä 1. Kun töiden tekeminen aloitetaan, koneella ei saa pitää taukoja, vaan seuraava työ on aloitettava heti edellisen loputtua (seuraavalla hetkellä). Järjestys on laiton, jos työ aloitetaan ennen aloitusaikaansa. Muutoin ongelman oletetaan olevan edellisen kaltainen. Tällä kertaa samanlaista yksinkertaista sääntöä, jolla saataisiin oikea ratkaisu, ei tunneta. Onneksi kaikkien vastausvaihtoehtojen luetteleminen ja niistä valitseminen on helppoa. Erilaisia vastausvaihtoehtoja on niin paljon, että tämä

menettelytapa ei käytännössä toimi, kun järjestettäviä töitä on monta. Luetteloivan menetelmän toimintaa voidaan havainnollistaa *puukaaviolla*. Kuvassa 1 on osittain piirretty neljään työhön liittyvä puu. Osapuu, jossa ensimmäiseksi työksi on valittu työ 1, on piirretty kokonaan. Tilan säästämiseksi osapuuhun, jossa ensimmäiseksi työksi on valittu työ 2, on piirretty vain *tason* 2 solmut, ja osapuihin, joissa ensimmäisiksi töiksi on valittu joko työ 3 tai työ 4, on piirretty vain tason 1 solmut.



Kuva 1: Esimerkki puun käytöstä luetteloivan menetelmän havainnollistajana. Solmu 1,3,*,* kuvaa tilannetta, jossa ensimmäisenä tehdään työ 1 ja toisena työ 3. Työt 2 ja 4 tulevat työn 3 jälkeen mutta niiden keskinäistä järjestystä ei ole vielä päätetty.

Taulukossa 4 on vasemmalla puolella neljän työn tapaus, joka voidaan ratkaista kuvan 1 puulla. Kussakin puun solmussa alkaen tasosta 1 lisätään valmisteilla olevaan työjärjestykseen uusi työ. Lopulta tason 4 solmut muodostavat joukon vastausehdokkaita, joista valitaan paras. Lisättäessä valmisteilla oleviin työjärjestyksiin uusia töitä voidaan samalla laskea kyseessä olevaan työjärjestykseen liittyvän lisättävän työn aloitusaika A_i, valmistumishetki V_i ja myöhästymisen pituus M_i. Taulukon 4 oikealla puolella on laskettu solmuun 1,3,2,4 liittyvät arvot. Työjärjestys 1,3,2,4 on samalla oikea vastaus: se ei ole laiton ja eniten myöhästyvän työn myöhästymisen pituus on mahdollisimman lyhyt, tässä tapauksessa 8.

Taulukko 4: Neljän työn esimerkki (vasemmalla), ja paras järjestys (oikealla).

Työ	1	2	3	4
p_i	9	3	5	3
a_i	1	11	5	1
m_i	6	9	10	14

Työ	1	3	2	4
A_i	1	10	15	18
V_i	9	14	17	20
M_i	3	4	8	6

Kysymykset

Lue aineisto huolella ja vastaa oheisiin tehtäviin. Tehtävien joukossa on kysymyksiä, joissa aineistoa sovelletaan suoraan, ja kysymyksiä, joissa aineiston pohjalta tulee tehdä päätelmiä. Kysymykset eivät välttämättä ole vaikeusjärjestyksessä.

1. (4 p.) Käytetään taulukon 5 tiedoista töiden pituuksia p_i ja valmistumishetkien kiireellisyyspainoja w_i. Tavoitteena on minimoida kaikkien töiden valmistumishetkien painotettua summaa.

   (a) Mikä on parhaassa työjärjestyksessä ensimmäisenä valmistuvan työn painotettu valmistumishetki?

   (b) Mikä on tällöin paras työjärjestys?

   (c) Milloin viimeisenä valmistuva työ valmistuu?

   (d) Laske valmistumishetkien painotettu summa.

2. (3 p.) Käytetään taulukosta 5 töiden pituuksia p_i ja määräaikoja m_i. Tavoitteena on eniten myöhässä valmistuvan työn myöhästymishetken minimointi.

   (a) Mikä on nyt paras työjärjestys?

   (b) Mikä on parhaan järjestyksen eniten myöhästyvä työ ja myöhästymisen pituus?

3. (5 p.) Seuraavat kysymykset liittyvät kuvaan 1.

   (a) Kuinka monta solmua kuvan 1 taso 4 yhteensä sisältää?

   (b) Piirrä kokonaan kuvan 1 tason 1 solmun 3,*,*,* osapuu.

Taulukko 5: Taulukko tehtäviin 1 ja 2.

Työ	1	2	3	4	5
p_i	4	3	5	7	2
w_i	10	5	4	6	7
m_i	8	18	9	3	13

4. (8 p.) Koska luetteloivaan menettelytapaan liittyvät puut kasvavat hyvin isoiksi, kun järjestettäviä töitä on monta, on mietitty erilaisia tapoja rajoittaa puun kokoa. Hyödyttämät osapuut voidaan jättää tarkasteluista pois, esimerkiksi tarkastelemalla eri järjestyksien laillisuuksia. Taulukon 6 tapauksessa solmu 1,2,*,* voidaan todeta laittomaksi, koska työ 2 aloitettaisiin liian aikaisin ($A_2 < a_2$, sillä $A_2 = 10$ ja $a_2 = 11$). Tämä tarkoittaa, että solmun 1,2,*,* osapuut ja niihin liittyvät ratkaisut voidaan sivuuttaa.

   Seuraavat kysymykset liittyvät taulukkoon 6.

   (a) Luettele **kaikki** tason 1 solmut, joihin liittyy laiton järjestyksen alkuosa. Esitä samalla perustelu, miksi kyseinen solmu on laiton.

   (b) Luettele **kaikki** tason 2 solmut, joihin liittyy laiton järjestyksen alkuosa. Esitä samalla perustelu, miksi kyseinen solmu on laiton. (Solmua 1,2,*,* ei tarvitse käsitellä.)

5. (5 p.) Käytetään vielä taulukon 6 tapausta.

   (a) Millä laillisilla järjestyksillä on suurin myöhästymisen pituus?

   (b) Kuinka paljon tuo suurin myöhästyminen on yksittäisellä järjestyksellä?

Taulukko 6: Taulukko tehtäviin 4 ja 5 (sama taulukko kuin aineiston taulukko 4).

Työ	1	2	3	4
p_i	9	3	5	3
a_i	1	11	5	1
m_i	6	9	10	14