

Tehtävä 3: Ongelmanratkaisutehtävä

Tässä tehtävässä esitetään neljä toisistaan riippumatonta yleistä ongelmanratkaisukykyä mittaavaa osatehtävää.

Kysymys 1

Sadan metrin mittainen lauta pitää katkaista sahalla metrin mittaisiksi laudanpätkiksi. Mikä on pienin määrä tarvittavia sahauksia, kun voit yhdellä sahauksella katkaista useita lautoja kerrallaan pinoamalla jo katkaistuja lautoja päällekkäin? Selitä, miten toimimalla pääset tavoitteeseesi. (maksimipistemäärä 5)

Kysymys 2

Olkoon n nollaa suurempi kokonaisluku. Kahden pelaajan K_n -pelissä asetetaan riviin n keilaa. Keilat ovat rivissä järjestyksessä $1, 2, 3, \dots, n$. Pelaajat kaatavat vuorotellen aina joko yhden keilan tai kaksi vierekkäistä keilaa (keilat i ja $i+1$, $1 \leq i \leq n-1$). Pelaaja häviää, mikäli hän ei pysty enää vuorollaan kaatamaan yhtään keilaa (eli kaikki keilat on jo kaadettu).

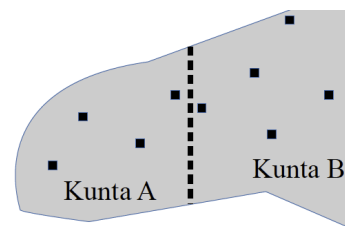
Pelaajalla on voittostrategia, jos hän pystyy aina kaatamaan sopivalla tavalla keiloja voittaakseen, vaikka toinen pelaaja kaataisi vuorollaan mitkä tahansa sääntöjen mukaiset keilat.

(a) Esitä jokin laillinen pelin kulku K_6 -pelissä, jossa aloittaja häviää. (maksimipistemäärä 2)

(b) Osoittautuu, että K_n -pelissä aloittavalla pelaajalla on aina voittostrategia kaikilla arvoilla $n \geq 1$. Kuvaile voittostrategia yksityiskohtaisesti. (maksimipistemäärä 4)

Kysymys 3

Erään niemen kärjessä sijaitsee kunta A , jonka ainoa naapurikunta on B . Kuntien A ja B välinen raja kulkee viiva-suoraan, kuten oheisen esimerkkikuvan katkoviiva esittää. Molemmissa kunnissa on voimassa kaavoitusta koskeva ohjesääntö, joka määrää, ettei kahta rakennusta saa rakentaa lähemmäksi kuin 50 metrin päähän toisistaan. Byrokraattisista syistä johtuen kumpikin kunta kuitenkin valvoo sääntöä vain suhteessa muihin oman kuntansa alueella sijaitseviin rakennuksiin. Tämän seurauksena on mahdollista, että jotkin kaksi rakennusta a ja b sijaitsevat lähempänä kuin 50 metrin päässä toisistaan, jos niistä toinen sijaitsee kunnassa A ja toinen kunnassa B . Katso esimerkiksi oheista esimerkkikuvaa, jossa pienet mustat neliöt kuvaavat rakennuksia. Vaikka rakennukset sijaitsevat melko väljästi kummankin kunnan sisällä, on kuntarajan läheisyydessä kaksi melko lähellä toisiaan olevaa rakennusta.



Oletetaan, että sekä kunnan A että B rakennukset ovat oman kuntansa säädösten puitteissa laillisia: kaikki kunnan A rakennukset sijaitsevat vähintään 50 metrin päässä toisistaan ja vastaavasti kaikki kunnan B rakennukset sijaitsevat vähintään 50 metrin päässä toisistaan.

Rakennukset voivat näitä sääntöjä lukuunottamatta sijaita mielivaltaisissa paikoissa. Mikä on suurin mahdollinen kunnassa B sijaitsevien rakennusten määrä, jotka voivat sijaita alle 50 metrin päässä jostain yhdestä ja samasta kunnan A alueella sijaitsevasta rakennuksesta? Perustele vastauksesi.

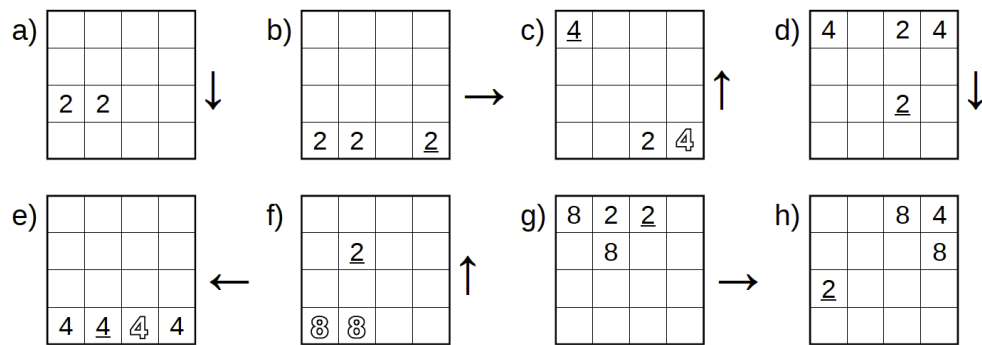
Tehtävässä jätetään huomioimatta rakennusten koot: kunkin rakennuksen sijainti esitetään kartalla koordinaattipisteinä ja kahden rakennuksen välinen etäisyys on yhtäkuin niitä esittävien koordinaattipisteiden etäisyys. Rakennuksia esittävät koordinaattipisteet voivat sijaita mielivaltaisen lähellä kuntarajaa (mutteivät kuitenkaan kuntarajan päällä).

(maksimipistemäärä 6)

Kysymys 4

2048 on selaimella tai älypuhelimella pelattava peli, joka nousi suosioon keväällä 2014. Pelin säännöt ovat seuraavat:

- Pelialue on 4×4 ruudukko, jossa on aluksi kaksi satunnaisesti ruutuihin sijoitettua arvon 2 omaavaa laattaa ja muut ruudut ovat tyhjiä.
- Pelaaja tekee siirtoja niin kauan, kunnes joko pelaaja saa luoduksi laatan, jonka arvo on 2048 (pelaaja voittaa), tai laillista siirtoa ei ole enää jäljellä (pelaaja häviää).
- Pelaajan yksittäinen siirto:
 - Pelaaja valitsee jonkin laillisen suunnan suunnista alas, vasemmalle, ylös tai oikealle. Suunta on laillinen, jos se johtaa vähintään yhden laatan siirtymiseen tai sulautumiseen (nämä on kuvattu alla). Peli päättyy, ellei mikään suunta ole laillinen.
 - * Seuraavan sivun ruudukon b tilanteessa ei voisi tehdä siirtoa alas tai ruudukon g tilanteessa ylös, koska kyseiset siirtosuunnat eivät siirtäisi tai sulauttaisi yhtään laattaa.
 - * Pelin päättyessä häviöön ruudukon jokaisessa ruudussa on laatta eivätkä mitkään naapurilaatat voi sulautua keskenään.
 - Pelaajan valinnan seurauksena kaikki ruudukossa olevat laatat siirtyvät ruudukossa niin pitkälle siirron määräämään suuntaan, kuin mahdollista.
 - Jos kaksi ennen siirtoa keskenään saman arvon x omannutta laattaa ovat siirron suunnassa peräkkäin (ikäänkuin “törmäävät” toisiinsa), ne sulautuvat yhteen yhdeksi laataksi, jonka arvo on $2x$.
 - * Jos siirron yhteydessä enemmän kuin kaksi keskenään saman arvoista laattaa törmää toisiinsa (“ketjukolarin” tapaan), sulautumiset muodostetaan pareittain edeten ketjun edestä taaksepäin. Katso esimerkiksi seuraavalla sivulla siirtoja ruudukosta b ruudukkoon c sekä ruudukosta e ruudukkoon f.
 - * Sulautumisen synnyttämä laatta ei voi osallistua kyseisen siirron aikana enää uuteen sulautumiseen. Esimerkiksi seuraavalla sivulla ruudukkoon e tehty siirto vasemmalle synnyttää ruudukkoon f kaksi vierekkäistä arvon 8 omaavaa laattaa eikä yhtä arvon 16 omaavaa laattaa.
- Kunkin siirron jälkeen ruudukon johonkin tyhjään ruutuun lisätään uusi laatta, jonka arvo on joko 2 tai 4. Sekä uuden laatan sijainti (mikä tyhjä ruutu) että arvo (2 vai 4) valitaan satunnaisesti.



Ruudukot a-g esittävät esimerkkinä yhden mahdollisuuden, miten pelin ensimmäiset 7 askelta voisivat edetä, kun pelin alkutilanne on ruudukon a esittämä ja 7 ensimmäistä siirtosuuntaa ovat järjestyksessä alas, oikealle, ylös, alas, vasemmalle, ylös ja oikealle. Viimeistä ruudukkoa h lukuunottamatta kunkin ruudukon oikealla puolella on nuoli, joka esittää ruudukkoon sovelletun siirron suunnan, ja sitä seuraava ruudukko esittää, millaiseksi pelialue kyseisen siirron jälkeen muuttui. Kussakin ruudukossa sulautumisen myötä syntyneet arvot on esitetty ääriiviivatuilla numeroilla ja edeltäneen siirron jälkeen ruudukkoon lisätty uusi satunnainen arvo on alleviivattu.

- (a) Mikä on pienin mahdollinen määrä siirtoja, jonka jälkeen peli voi päättyä häviöön?
Perustele vastauksesi!

(maksimipistemäärä 4)

- (b) Kuinka monta siirtoa pelissä on vähintään tehtävä, jotta peli voi päättyä voittoon?
Perustele vastauksesi!

(maksimipistemäärä 4)

Tehtävän pisteytyksessä arvioidaan annettujen siirtomäärien tarkkuuksien lisäksi erityisesti sitä, kuinka hyvin vastaukset on pystytty perustelemaan. Jos perustelut ovat hyvät, voi tehtävästä saada korkeat pisteet, vaikka vastaukseksi annetut siirtomäärät olisivat epätarkkoja.