

## Tehtävä 3: Esimerkkiratkaisut

### Kysymys 1.

Oikea vastaus on 7 sahauskertaa. Ensiksi 100 metrin mittainen lauta sahataan keskeltä kahtia ja tuloksena syntyy kaksi 50 metriä pitkää lautaa. Tämän jälkeen laudat laitetaan päällekkäin ja sahataan taas keskeltä siten, että tuloksena syntyy neljä 25 metrin mittaista lautaa. Kolmannella kerralla neljä lautaa laitetaan päällekkäin, ja sahataan siten, että lopputuloksena syntyy 4 kappaletta 13 metriä pitkää lautaa ja 4 kappaletta 12 metriä pitkää lautaa. Jatkamalla vastaavasti seitsemännen sahauskerran jälkeen on saatu 100 kappaletta yhden metrin mittaisia laudanpätkiä. Allaolevassa taulukossa on listattu eri sahauskertojen tuloksena syntyneiden laudanpätkien pituudet ja lukumäärät.

Sahauskerta	Laudanpätkien pituudet	Lukumäärä
1	2*50m	2
2	4*25m	4
3	4*13m+4*12m	8
4	4*7m+12*6m	16
5	4*4m+28*3m	32
6	36*2m+28*1m	64
7	100*1m	100

### Kysymys 2.

- a) Oheisessa taulukossa on esitetty yksi mahdollinen peli, jonka aloittava pelaaja häviää. Siirtovuorolla valitut keilat on paksunnettu.

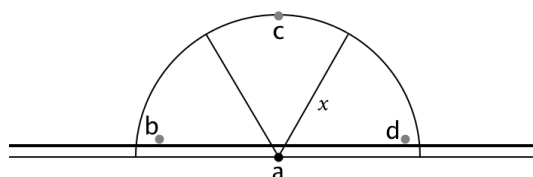
Pelaaja	Keilat
A	<b>I</b> I I I I I
B	I <b>I</b> <b>I</b> I I
A	I I <b>I</b> <b>I</b>
B	<b>I</b>
A	

- b) Aloittaja voittaa pelit  $K_1$  ja  $K_2$  valitsemalla kaikki keilat. Aloittaja voittaa myös pelin  $K_3$  ( $K_4$ ) valitsemalla ensin keskimmäisen keilan (keskimmäiset keilat) ja tämän jälkeen tekemällä symmetrisen siirron "toisella puolella" kuin toinen pelaaja.

Tämä strategia yleistyy myös peleille  $K_n$ ,  $n \geq 5$ . Aloittaja voittaa aina pelin siten, että ensimmäisellä siirrolla hän jakaa keilarivin kahteen yhtä paljon keiloja sisältävään osaan. Tästä eteenpäin kaikki siirrot kohdistuvat joko vasempaan tai oikeaan osaan keiloja. Jos toinen pelaaja valitsee keilan/keilat vasemmalta/oikealta puolelta, niin ensimmäinen pelaaja valitsee vuorollaan aina vastaavat keilat, mutta toiselta puolelta.

### Kysymys 3.

Tarkastellaan oheista kuviota, jossa  $a$  on kunnassa  $A$  sijaitseva rakennus ja rakennukset  $b$ ,  $c$  ja  $d$  sijaitsevat kunnassa  $B$ . Paksu viiva esittää kuntien  $A$  ja  $B$  välistä rajaa. Rakennus  $a$  keskipisteenä on piirretty säteen  $x$  metriä



omaava puoliympyrä, jonka halkaisija sijaitsee kuntarajan kanssa samansuuntaisella viivalla (kuvan ohuempi viiva). Jokaisen sellaisen kunnassa  $B$  sijaitsevan rakennuksen, jonka etäisyys rakennuksesta  $a$  on korkeintaan  $x$  metriä, on sijaittava kuvassa esitetyssä puoliympyrässä.

Kuva esittää, kuinka kolme vähintään 50 metrin etäisyydellä toisistaan sijaitsevaa kunnan  $B$  rakennusta  $b$ ,  $c$  ja  $d$  voivat sijaita alle 50 metrin päässä rakennuksesta  $a$ . Kuvan kaltaisessa tilanteessa voisi esimerkiksi asettaa  $x = 45$  metriä ja sijoitella rakennukset niin, että rakennus  $a$  sijaitsee 4 metrin päässä rajasta ja rakennukset  $b$ ,  $c$  ja  $d$  sijaitsevat sellaisen tasakylkisen kolmion kärkipisteissä, jonka korkeus on 40 metriä ja leveys 80 metriä. Tällöin  $b$ ,  $c$  ja  $d$  ovat korkeintaan 45 metrin päässä  $a$ :sta mutta toisaalta  $b$ :n ja  $d$ :n välinen etäisyys on 80 metriä ja  $b$ :n ja  $c$ :n (ja samoin  $c$ :n ja  $d$ :n) välinen etäisyys on  $\sqrt{40^2 + 40^2} = \sqrt{3200} > \sqrt{2500} = 50$  metriä (eli  $b$ ,  $c$  ja  $d$  sijaitsevat kunnan  $B$  sääntöjen mukaisesti).

Kuvan puoliympyrä on lisäksi jaettu kolmeen yhtä suureen osaan eli  $60^\circ$  sektoriin. Ei ole erityisen hankalaa päätellä, että säteen  $x$  omaavan ympyrän  $60^\circ$  sektorin mitkään kaksi pistettä eivät voi sijaita kauempana kuin  $x$ :n etäisyydellä toisistaan. Kun tarkastelemme alle 50 metrin etäisyydellä olevia rakennuksia, pätee  $x < 50$  metriä. Mutta koska kunnan  $B$  rakennusten välinen etäisyys on vähintään 50 metriä eli  $> x$ , eivät mitkään kaksi kunnan  $B$  rakennusta voi sijaita keskenään samassa sektorissa. Tästä seuraa, että kussakin kuvan kolmesta sektorista voi sijaita korkeintaan yksi alle 50 metrin päässä rakennuksesta  $a$  oleva rakennus. Siten tällaisia rakennuksia voi kaikkiaan olla korkeintaan kolme.

Tehtävän vastaus on kolme rakennusta.

#### Kysymys 4.

- a) Ruudukossa on kaikkiaan 16 ruutua. Pelin alkaessa, ennen ensimmäistä siirtoa, näistä kahdessa on arvon 2 omaava laatta. Ruudukko voi siten tulla täyteen ja peli päättyä aikaisintaan 14 siirron jälkeen. Eräs tapa, miten peli voi päättyä 14 siirrolla on esimerkiksi seuraava:

- Alkutilanteen laatat sijaitsevat ensimmäisen rivin ensimmäisessä ja kolmannessa sarakkeessa.
- Pelaajan kaksi ensimmäistä siirtoa ovat “ylös” ja “alas”, ja näiden myötä lisätyt laatat omaavat arvon 4 ja tulevat toiseen ja neljänteen sarakkeeseen.
- Pelaaja jatkaa siirtojen “ylös” ja “alas” vuorottelua ja ruudukkoon arvottavan laatan arvo valitaan aina siten, että se on eri kuin samassa sarakkeessa jo olevan naapurin arvo (pelkästään ylös ja alas tehtävien siirtojen jälkeen lisätty uusi laatta ei voi tulla sijoitetuksi kahden samassa sarakkeessa jo olevan laatan väliin). Tällöin mikään siirto ei johda laattojen sulautukseen.

Edellä kuvattu peli päättyy 14 siirron jälkeen oheisen kuvan mukaiseen "shakkilautamaiseen" tilanteeseen, jossa joka toisessa ruudussa on arvo 2 ja joka toisessa arvo 4 eikä ole jäljellä yhtään laillista siirtosuuntaa.

2	4	2	4
4	2	4	2
2	4	2	4
4	2	4	2

- b) Aluksi voidaan tehdä huomiot, että **(1)** pelin alkutilanteessa ruudukon laattojen arvojen summa on 4, **(2)** sulautumiset eivät vaikuta peliruudukossa olevien laattojen arvojen

summaan ja **(3)** ainoa laattojen arvojen summaa muuttava tekijä on ruudukkoon lisättävät uudet laatat: laattojen summa kasvaa kunkin siirron jälkeen täsmälleen sen verran, mikä on ruudukkoon arvoitun uuden laatan arvo.

Pelin päättymisen voittoon edellyttää arvon 2048 omaavan laatan muodostamista eli ruudukon laattojen arvojen summan on oltava tällöin vähintään 2048. Koska laattojen arvojen summa kasvaa kunkin siirron jälkeen korkeintaan neljällä, tarvitaan vähintään  $(2048-4)/4 = 511$  siirtoa, ennen kuin laattojen summaksi voi tulla 2048. Tästä saadaan siirtojen määrälle karkea alaraja 511.

Arvioita voidaan vielä tarkentaa huomioimalla se, että voittotilanteessa nimenomaan yksittäisen laatan arvon pitää olla 2048. Olkoon  $x$  se siirtonumero, jonka jälkeen peliruudukkoon lisätään viimeinen sellainen laatta, jonka arvo tulee sulautumisten kautta muodostamaan osan arvon 2048 saavaan laatan arvosta. Edellisen karkean alarajan perusteella siirron  $x$  on oltava vähintään 511. Siirron  $x$  lisäämä laatta joutuu käymään läpi vähintään sulautumisketjun, jossa muodostuu askeleittain arvot  $4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow 256 \rightarrow 512 \rightarrow 1024 \rightarrow 2048$ . Tämä ketju sisältää 9 siirtoa. Näin ollen edellä annettu karkea 511 siirron alaraja saatiin tarkennettua  $511 + 9 = 520$  siirtoon.

Vastauksessa ei sitä edellytetä, mutta on mahdollista muodostaa esimerkkipeli, joka päättyy voittoon täsmälleen 520 siirrolla eli 520 siirtoa on tarkka raja.