

Uppgift 3: Problemlösning, modellsvar

Fråga 3.1. Vi anger åldrarna med variablerna P = pojkens ålder, T = dotterns ålder, V = fruns ålder, N = grannens ålder och I = farmors ålder. Från uppgiftens text kan vi formulera ekvationerna:

$$\begin{aligned}P &= 3T \\V &= 7P = 21T \\N &= V = 21T \\I &= 92 = P + T + V + N = 3T + T + 21T + 21T = 46T \\T &= I/46 = 92/46 = 2 \\N &= 21T = 21 \cdot 2 = 42\end{aligned}$$

Grannen är således 42 år.

Fråga 3.2. Vi granskar möjliga alternativ enligt fallen där troll B är god eller ond.

- Om B är god, måste trollen A och C som säger att han är ond själva vara onda. Då finns det 1 gott och 2 onda troll.
- Om B är ond, måste troll C som säger att han är ond själv vara god. Å andra sidan måste då troll A som säger att troll C är ond själv vara ond. Även då har vi 1 gott och 2 onda troll.

I båda fallen finns det 1 gott och 2 onda troll. Enligt detta är svaret på frågan att du mötte 2 onda troll.

Fråga 3.3. Vi kontrollerar intervallet 0-999 i stället för 1-1000. De ger samma svar, för varken 0 eller 1000 använder något klistermärke med "9". Nedan antar vi för enkelhetens skull att vi kan använda begynnelsenollor för talen. För begynnelsenollorna behövs inte klistermärken med "9" så de påverkar därför inte resultatet.

Vi kontrollerar först intervallet 00-99. Sådana tal kan vi representera i formen YZ, där Y är första och Z andra siffran. Inom detta intervall innehåller varje 10 på varandra följande tal i intervallen 00-09, 10-19, ..., 80-89 exakt ett tal av formen Y9 och behöver ett klistermärke med "9". Varje tal i intervallet 90-98 är av formen 9Z och behöver ett klistermärke med "9" och dessutom behöver talet 99 två klistermärken med "9". Genom att räkna ihop dessa får vi att intervallet 00-99 kräver $9 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 2 = 20$ st klistermärken med "9".

Vi kontrollerar nu hela intervallet 000-999, alltså talen av formen XYZ.

Datavetenskapens urvalsprov, våren 2021

- Om X inte är 9, behövs det för talen av formen XYZ lika många klistermärken med "9" som för talen i intervallet 00-99: varje tal av formen XYZ motsvarar talen i intervallet 00-99 framför vilka det satts till en siffra X . Det finns 9 sådana alternativ för X , d.v.s. $X = 0, \dots, 8$, och de förbrukar enligt tidigare beräkningar tillsammans $9 \cdot 20 = 180$ st. klistermärken med "9".
- Om X är 9, d.v.s. talet har formen $9YZ$, behövs lika många klistermärken med "9" som i intervallet 00-99 samt dessutom en första siffra 9 som kräver klistermärken med "9" för varje sådant tal. Talen av formen $9YZ$ är 900-999, d.v.s. de är 100 stycken. Talen av formen $9YZ$ förbrukar då sammanlagt $20 + 100 = 120$ klistermärken med "9".

På basen av det ovannämnda behövs det totalt $180 + 120 = 300$ klistermärken med "9" för att märka alla tal i intervallet 000-999.

Fråga 3.4. Vi undersöker en replik åt gången och vad man kan avgöra på basen av dem.

- Minna: "Jag vet inte vilket kort Peter tänker på, men jag vet, att inte Ville heller vet."
 - För att Minna som endast hört färgen vet, att Ville som endast hört valören inte heller kan veta vilket kort det är, bör alla valörer i den färg Minna har hört förekomma på flera kort. Därför kan färgen inte vara hjärter eller ruter, då hjärter 9 och ruter 8 till sina valörer skulle vara entydiga kort. Färgen är således spader eller klöver.
- Ville: "Först visste jag inte vilket Peters kort var, men nu vet jag."
 - Ville kunde p.g.a. Minnas föregående kommentar avgöra att färgen är spader eller klöver. För att Ville på basen av denna information ska kunna identifiera kortet, ska valören förekomma antingen enbart i klöver eller enbart i spader. Valören är då 5, 6 eller 7 (valören 4 utesluts, som förekommer både i spader och i klöver).
- Minna: "I så fall vet jag också nu."
 - Efter Villes föregående kommentar, vet vi att kortet antingen är spader 6, klöver 5 eller klöver 7. För att Minna som endast hört färgen nu ska kunna identifiera kortet, bör färgen vara spader. Om den skulle vara klöver, skulle Minna inte kunna veta om kortet är klöver 5 eller klöver 7.

Datavetenskapens urvalsprov, våren 2021

På basen av ovanstående resonemang är rätta svaret spader 6. Detta svar ger fulla 4 poäng. Ett svar som bara delvis beaktar det sista beslutssteget (klöver 5 eller klöver 7) ger 1 poäng.

Fråga 3.5. Tågen avgår med 24 minuters mellanrum, p.g.a. att tåg som rör sig med samma hastighet i motsatt riktning möter varandra hälften snabbare än de föremål som står stilla (t.ex. stationen). Avgångar med 24 minuters mellanrum innebär 10 tåg på 240 minuter (= 4 timmar). Under ett dygn, d.v.s. $6 \cdot 4 = 24$ timmar, avgår då $6 \cdot 10 = 60$ tåg. Tågen avgår och anländer med samma intervall, så från stad B anländer 60 tåg i dygnet till stad A.

Fråga 3.6. Svaret på frågan är 20 minuter. Här var det väsentligt att observera att eftersom en långsam och en snabb person går över bron enligt den långsammaste hastighet, kan det löna sig för de två långsammaste (barnet och åldringen) att gå över bron endast en gång och tillsammans. För att göra det här möjligt måste någon annan redan ha gått över till andra sidan före dem, så att hen senare ska kunna återvända med ficklampan. Nedan presenteras stegen för ett sådant lösningssätt med motsvarande tidsåtgång. Högerpil (\rightarrow) betyder att man går över bron till andra sidan och vänsterpil (\leftarrow) att man återvänder tillbaka.

1. \rightarrow ungdomen + vuxna, 3 min.
2. \leftarrow ungdomen, 2 min.
3. \rightarrow barnet + åldringen, 9 min.
4. \leftarrow vuxna, 3 min.
5. \rightarrow ungdomen + vuxna, 3 min.

Lösningens totaltid är sammanlagt $3 + 3 + 9 + 2 + 3 = 20$ minuter.

En alternativ lösning som visar sig vara felaktig, där åldringen och barnet går över bron skilt, kan förverkligas så att den snabbaste att gå över bron (ungdomen) följer alla andra en i taget över bron. Denna alternativa lösning presenteras nedan. Den tar 21 minuter, d.v.s. denna lösning är inte snabbast.

1. \rightarrow ungdomen + barnet, 5 min.
2. \leftarrow ungdomen, 2 min.
3. \rightarrow ungdomen + vuxna, 3 min.
4. \leftarrow ungdomen, 2 min.
5. \rightarrow ungdomen + åldringen, 9 min.

Datavetenskapens urvalsprov, våren 2021

Fråga 3.7. 3 älvor räcker. Man låter de tre älvorna A, B och C smaka på kakorna till exempel enligt följande tabell:

	Älva A	Älva B	Älva C
Kaka 1	smakar på		
Kaka 2		smakar på	
Kaka 3			smakar på
Kaka 4	smakar på	smakar på	
Kaka 5	smakar på		smakar på
Kaka 6		smakar på	smakar på
Kaka 7	smakar på	smakar på	smakar på
Kaka 8			

Ovan är det väsentligt att alla kakor har sinsemellan olika provsmakargrupper. På basen av detta kan vi efter att allergisymptomen uppkommit entydigt besluta vilken kaka som alla de som fått allergisymptom har provsmakat. Observera att ingen provsmakar kaka 8. Om ingen av provsmakarna får allergisymptom, är kaka 8 den allergiframkallande kakan.

Fråga 3.8. Vi går igenom steg för steg vad man kan besluta av ledtrådarna. Observera att man kan behandla ledtrådarna i vilken ordning som helst.

- Ledtrådarna 6 och 5: Den svenska chokladen kostar 1,95 € och Leos choklad 0,10 € mindre än den schweiziska chokladen, så den schweiziska chokladen kostar 1,85 € eller 1,90 €.
 - Här stödde vi oss på observationen att eftersom Leos choklad kostar minst 1,75 €, så kostar den schweiziska minst 1,85 €.
- Ledtråd 4: Av chokladplattorna som Anna och Sofia åt innehåller den ena 65 % kakao och den andra är från Schweiz, så antingen innehåller Sofias choklad 65 % kakao eller så är den schweizisk.
- Ledtråd 8: Av den finska chokladen och chokladen som Sofia åt kostar den ena 1,75 € och den andra innehåller 65 % kakao, så Sofias choklad kostar antingen 1,75 € eller så innehåller den 65 % kakao.
- På basen av de två ledtrådarna ovan kan vi dra bl.a. följande tre slutsatser:
 - Om Sofias choklad inte innehåller 65 % kakao, måste den vara schweizisk och kosta 1,75 €. Detta strider mot det första beslutsteget, så Sofias choklad innehåller 65 % kakao och dess pris är \neq 1,75 €.

Datavetenskapens urvalsprov, våren 2021

- Således är Annas choklad schweizisk och dess kakaopроent är \neq 65 %.
- Dessutom kostar finländska chokladen 1,75 €.
- Ledtråd 1: Chokladen som innehåller 50 % kakao kostar 15 cent mera än den choklad som Sofia åt, så Sofias choklad kan högst kosta 1,80 €. Ovan fick vi att priset på Sofias choklad \neq 1,75 €, så enda kvarvarande alternativ är exakt 1,80 €.

Ovan fick vi svaret på delfråga A: Sofia åt chokladen som kostar 1,80 €. Vi fortsätter att utreda från vilket land chokladen kommer som varje person ätit. Tillsvidare vet vi från vilket land Mikkos (Belgien) och Annas (Schweiz) choklad kommer.

- Varken Mikko (Belgien), Anna (Schweiz), Sofia (ledtråd 6) eller Leo (ledtrådarna 5 och 6) åt den svenska chokladen, så Sam åt den. Chokladen kostar 1,95 € (ledtråd 6).
- På basen av vad vi redan vet kostar den schweiziska och den belgiska chokladen antingen 1,85 € eller 1,90 €, vilket leder till att den tyska chokladen kostar 1,80 €. Därmed är Sofias choklad tysk.
- För Leos choklad blev det enda alternativet Finland.

Nu vet vi från vilket land varje persons choklad kommer. Genom att kombinera detta med tidigare uppgifter om land vet vi också alla andra priser, men om prisen på Annas schweiziska och Mikkos belgiska choklad vet vi endast att den ena kostar 1,85 € och den andra 1,90 €. Detta löser sig med ledtråd 5 (chokladen som Leo äter kostar 0,10 € mindre än den schweiziska chokladen), från vilket vi får att priset på Annas schweiziska choklad är 1,85 €. Priset på Mikkos belgiska choklad blir 1,90 €.

Nu när vi vet alla personerna, länderna och priserna, koncentrerar vi oss till slut ännu på att klargöra kakaoprocenterna. Tillsvidare vet vi att kakaoprocenten i Sofias tyska choklad är 65 %.

- Den choklad som innehåller 50 % kakao kostar 0,15 € mera än den choklad Sofia äter, så chokladen med 50 % kostar 1,95 €, den äts av Sam och är från Sverige.
- Angående Mikkos belgiska choklad som kostar 1,90 € vet vi att den inte innehåller 55 % kakao (ledtråd 7), så endast 45 % eller 60 % blir kvar. På basen av ledtråd 3 innehåller den $<$ 60 % så endast 45 % blir kvar.

Datavetenskapens urvalsprov, våren 2021

- Enda kvarvarande oklarheten är nu kakaoprocenterna i Annas schweiziska choklad för 1,85 € och Leos finska choklad för 1,75 €: den ena innehåller 55 % och den andra 60 %. Ledtråd 7 anger att priset på chokladen med 55 % är 1,85 €, så Annas schweiziska choklad för 1,85 € innehåller 55 % och Leos finska choklad för 1,75 € innehåller 60 % kakao.

Vi fick till slut svaret på delfråga B: den finska chokladens kakaoprocent är 60 %.